Thüringer Kultusministerium

Abiturprüfung 1995

Mathematik

als Leistungsfach
(Haupttermin)

Hinweise für die Prüfungsteilnehmerinnen und Prüfungsteilnehmer

Arbeitszeit:	240 Minuten
Einlesezeit:	30 Minuten
Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht graphikfähig) Tafelwerk

Der Prüfungsteilnehmer wählt von den Aufgaben 1.1 und 1.2 eine und von den Aufgaben 2.1 und 2.2 und 2.3 zwei zur Bearbeitung aus.

Neben jeder Teilaufgabe steht die für diese Teilaufgabe maximal erreichbare Anzahl von Bewertungseinheiten (BE).

Aufgabe 1.1

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 \qquad (x \in R).$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Symmetrie!

1 BE

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_t mit der x-Achse!

2 BE

c) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!

5 BE

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen f_t?
Geben Sie eine Gleichung dieser Ortskurve an!

3 BE

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \le x \le 5$!

1 BE

f) Die Punkte $P_1\left(t;\frac{5}{9}t^2\right), P_2\left(t\sqrt{6};0\right)$ und $P_3\left(-t\sqrt{6};0\right)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion!

5 BE

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximumpunkte des Graphen von f_2 schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P\left(x_p; f_2\left(x_p\right)\right)$ und $Q\left(-x_p; f_2\left(-x_p\right)\right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks ΔQPS.
Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks ΔQPS an!

8 BE

h) Der Graph von f_t, die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die x-Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt A(t). Berechnen Sie A(t)!

5 BE

Aufgabe 1.2

Für jedes $t \geq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch
$f_t(x) = x(t - \ln x)$ $(x \in R;\ x > 0)$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, lokale Extrempunkte und Wendepunkte!
Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten dieser Punkte und weisen Sie die Art der lokalen Extrema nach!

6 BE

b) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 im Intervall $0 < x \leq 8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem!

3 BE

c) An welcher Stelle x_B muß man die Tangente an den Graphen von f_t legen, damit diese Tangente durch den Punkt T(0; 3) verläuft?

4 BE

d) Es sei $P(x;\ f_t(x))$ mit $0 < x < e^t$ ein Punkt auf dem Graphen von f_t. Die Parallele zur y-Achse durch P schneidet die x-Achse in einem Punkt Q, die Parallele zur x-Achse durch P schneidet die
y-Achse in einem Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von P für den Fall, daß der Flächeninhalt des Rechtecks OQPS maximal wird (O bezeichnet den Koordinatenursprung.)!

6 BE

e) Zeigen Sie, daß die Funktion F_t mit
$F_t(x) = \frac{x^2}{2}(t - \ln x + \frac{1}{2}) + 1995$ eine Stammfunktion von f_t ist!

2 BE

f) Eine Fläche wird vom Graphen der Funktion f_t, der x-Achse und den Geraden $x = e^{t-1}$ und $x = e^t$ vollständig begrenzt. Berechnen Sie den Inhalt A_t dieser Fläche!

4 BE

g) Die Zahlen $A_n = \frac{1}{4}e^{2n}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$ sind für $n \in N, n \geq 0$ die Glieder einer Zahlenfolge (A_n).

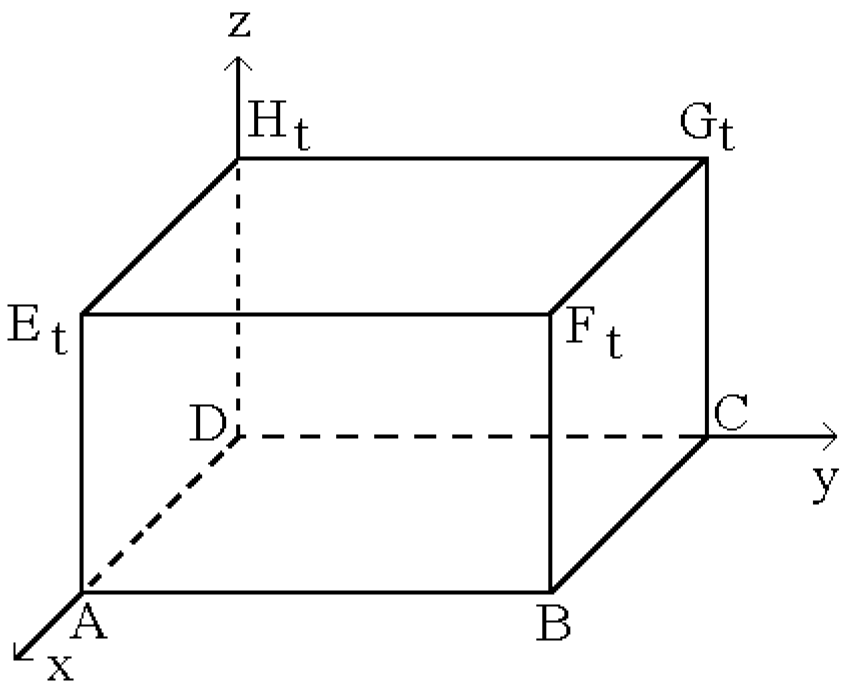
Beweisen Sie, daß für die Partialsummenfolge (s_n) mit $s_n = A_0 + ... + A_n$ gilt:

$$s_n = \frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)\frac{1-e^{2n+2}}{1-e^2} \qquad !$$

$\boxed{\text{5 BE}}$

Aufgabe 2.1

Für jedes t $(t \in R,\ t \neq 0)$ ist ein Quader $ABCDE_tF_tG_tH_t$ mit $F_t(6;12;t)$ in einem kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung D gegeben (siehe Skizze). Mit g_t sei die Gerade durch D und F_t bezeichnet, ε_t sei die Ebene durch die Punkte B, E_t und G_t.



(Skizze nicht maßstäblich)

a) Geben Sie eine Gleichung für die Ebene ε_{18} an! Die Gerade g_{18} schneidet die Ebene ε_{18} in einem Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie den Schnittwinkel α von g_{18} mit ε_{18} !

4 BE

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $BG_{18}E_{18}F_{18}$ und geben Sie den Abstand des Punktes F_{18} von ε_{18} an!

3 BE

c) Für welche positive Zahl t hat der Punkt F_t von der Ebene ε_t den Abstand 4?

3 BE

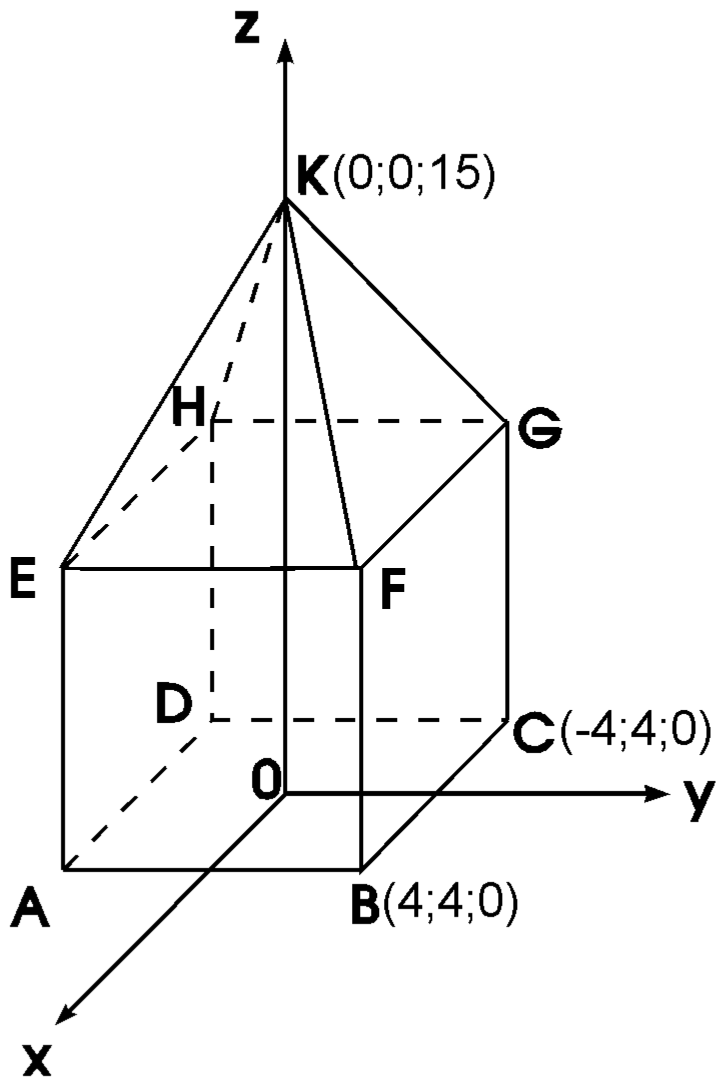
d) Weisen Sie nach, daß es kein $t \in R$ gibt, so daß die Gerade g_t senkrecht zur Ebene ε_t ist!

2 BE

e) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s_t von ε_t mit der x-y-Ebene an! Untersuchen Sie s_t auf Schnittpunkte mit der Parabel $y = x^2 - 16x + 64$, und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! $\boxed{\text{3BE}}$

Aufgabe 2.2

Der Turm einer Burg hat die Form eines Würfels, dem eine gerade Pyramide aufgesetzt ist (siehe Zeichnung in einem kartesischen Koordinatensystem). Die Kantenlänge des Würfels beträgt 8,00 m, die Höhe der Pyramide 7,00 m.



a) Die Ebenen ε_1 bzw. ε_2 enthalten die Punkte E, F und K bzw. die Punkte F, G und K. Geben Sie für beide Ebenen je eine parameterfreie Gleichung an!

4 BE

b) Unter welchem Winkel schneiden sich ε_1 und ε_2 (aus Teilaufgabe a)?

2 BE

c) Wie lang ist die Turmkante $\overline{FK}$, und welchen Neigungswinkel hat sie gegenüber der x-y-Ebene?

2 BE

d) Auf der Turmspitze K befindet sich ein 3,00 m langer in Richtung der z-Achse verlaufender Fahnenmast mit der Spitze S.
Ein Beobachter steht im Punkt $T(0; y_T; 0)$. Seine Augenhöhe beträgt 1,60 m. Wie groß muß y_T mindestens sein, damit der Beobachter die Spitze S sehen kann?

4 BE

e) Aus Gründen der Stabilität wird in das Turmdach ein Balken eingezogen, von dessen Dicke abgesehen wird. Der Balken geht vom Mittelpunkt der Kante $\overline{EH}$ aus und stützt die Dachfläche FGK so ab, daß er senkrecht zu dieser Fläche steht.
Berechnen Sie die Länge des Balkens!

3 BE

Aufgabe 2.3

In Thüringen kann man 1ℓ Voll- bzw. Magermilch in verschiedenen Verpackungen kaufen.
Um das Kaufverhalten der Kunden zu hinterfragen, wird Milch nur mittels Automaten verkauft.
Folgendes Wahlverhalten von 2588 Kunden wurde registriert:

	Vollmilch	Magermilch
Glasflasche	214	178
Plastflasche	753	632
Pappverpackung	441	370

Betrachtet werden die Ereignisse
A:= "der Kunde entscheidet sich für Magermilch",
B:= "der Kunde kauft Magermilch in einer Plastflasche",
C:= "der Kunde wählt weder Plastflasche noch Magermilch",
D:= "der Kunde entschied sich für Vollmilch in einer Plastflasche".

a) Ermitteln Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C und D!

4 BE

b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und
E:= "der Kunde wählt eine Plastflasche"
voneinander unabhängig sind!

1 BE

Um das Rückgabeverhalten der Kunden zu analysieren, werden die n Plastflaschen durchnumeriert und alle verkauft. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine dieser Flaschen nach Gebrauch zurückgegeben wird, heiße Rückgabewahrscheinlichkeit und werde mit p bezeichnet. Es gilt p = 0,70.

c) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
F:= "von n = 15 Flaschen werden genau 4 Flaschen zurückgegeben",
G:= "von n = 100 Flaschen werden mehr als 21 Flaschen nicht zurückgegeben"!

3 BE

d) Bestimmen Sie k so, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses
H_k:= "von 100 Flaschen werden weniger als k Stück zurückgegeben"
kleiner als 0,05 ist!

2 BE

Jede zurückgegebene Plastflasche werde wieder gefüllt und verkauft. Beachten Sie, daß eine Flasche erst dann zurückgegeben werden kann, wenn mit ihr bereits 1ℓ Milch verkauft wurde.

e) Berechnen Sie für p = 0,70 jeweils die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse
J:= "mit ein und derselben Flasche lassen sich insgesamt genau 5ℓ Milch verkaufen",
K:= "mit ein und derselben Flasche lassen sich insgesamt mindestens 5ℓ Milch verkaufen"!

3 BE

f) Bestimmen Sie die Rückgabewahrscheinlichkeit p für den Fall, daß das Ereignis
L:= "mit ein und derselben Flasche werden mindestens 10ℓ Milch verkauft"eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,85 besitzt!

2 BE